正・準正多面体と菱面体(研究会「形と空間」,形態形成の科学的研究(II),科研費研究会報告)

別宮, 利昭

正．準正多面体と菱面体

別宮　利昭（ユニーク・デザイン・スタジオ）

歴史が古いというか、すでに研究され尽くされていると思われる正多面体等をタイトルにいれてみると肩が凝りそうなので、こんなふうにすればこんなものができるんだ、とおおよそ理解してもらえれば十分と考えて、まだ完成していない研究を途中経過として述べさせていただく。

二次元での試み

正２ｎ角形の菱形への分割

正２ｎ角形を菱形に分割すると $_nC_2$ 個のタイルが多角形の中を充填している。（図１）　これは各多角形の中のタイルで二次元空間を充填できることを意味している。　なぜならば２ｎ個の正２ｎ角形の或る頂点０を固定してＡをＢに重ねて置くと図２のように一辺が２の相似形になる。一辺が２の各々のタイルで図１のように入れ直して前の操作を繰り返せば、一辺が４の相似形になる。次々にこの操作を繰り返せば平面を埋め尽くす。

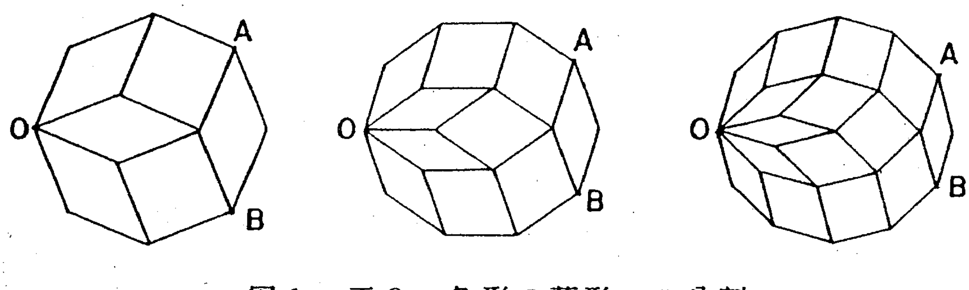


図１　正２ｎ角形の菱形への分割

正多角形から菱形を発生させる

いままでは先に正偶数多角形があってそれを菱形に分割していた。こんどは正多角形の辺又は対角線を菱形の対角線になるように正多角形の中心から各頂点へのベクトルの合成として考えると事情が変わってくる。（図３）

正多角形が奇数の場合は外角の数が倍になるが、偶数の場合は外角の数は変わらず一辺の長さが倍にり、中の菱形の数もかずも少なくなっている。こ

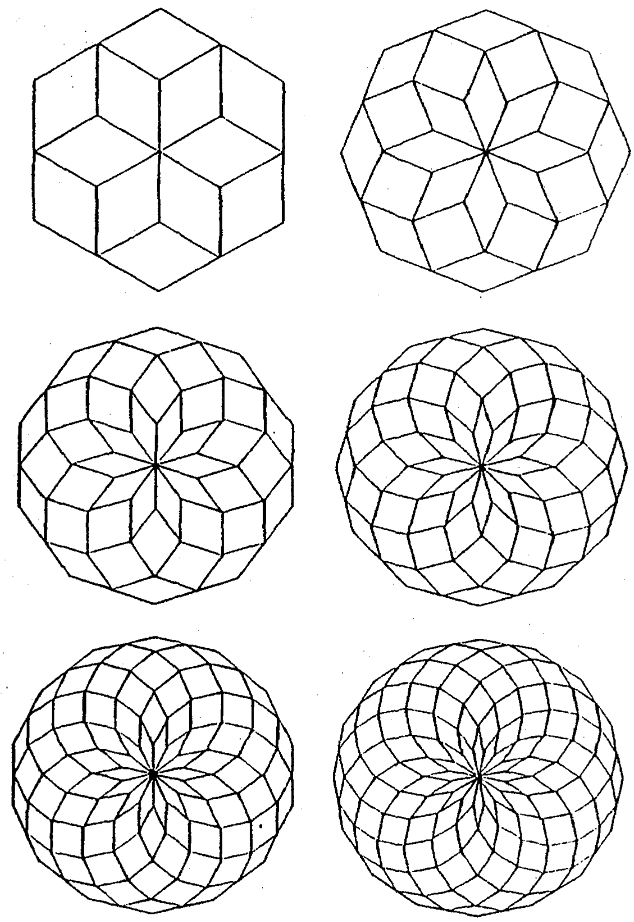


図２　１辺が２の相似形

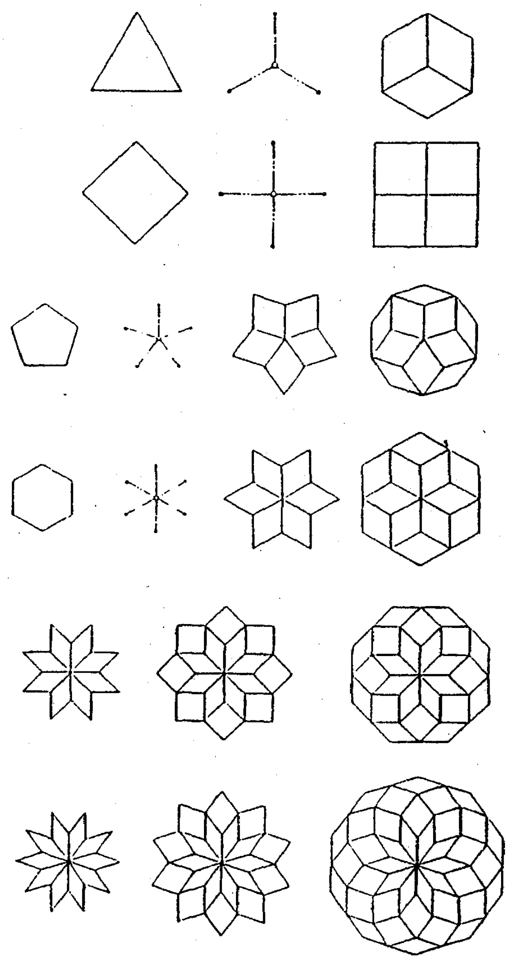


図３

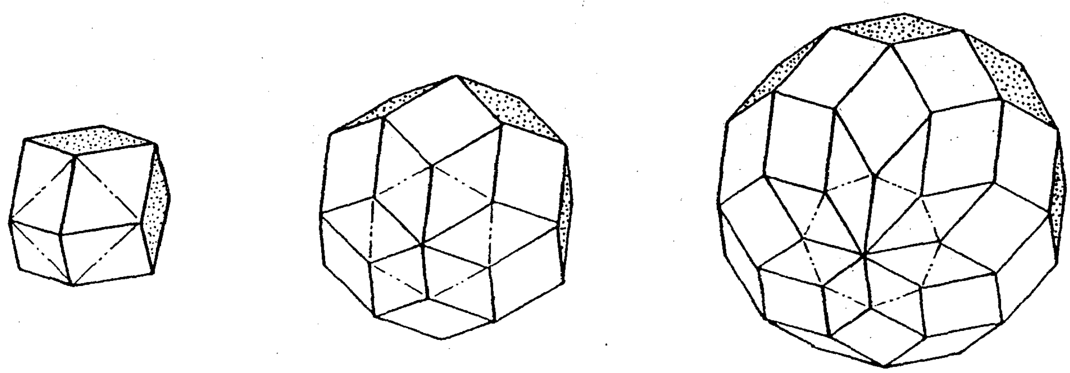


図４　線に退化した菱形を探す

れは元の正多角形が偶数であるため二つの頂点と中心点が一直線に並んでしまいベクトルの合成である菱形が直線に退化してしまったと考えられる。そこで直線に退化してしまった菱形が幾つあるのかを知るために中心点を少しずらしてみる（図４）。　つまり中心を通る対角線の数だけ足りないことが判明した。

三次元での試み

正多角錐からゾーン多面体をつくる

二次元の正多角形からの場合と同様の操作を三次元でおこなうと、正多角錐の頂点から底面の多角形の頂点にむかうベクトルの合成になり、できるかたちはゾーン多面体になる。　底面がｎ角形の場合できあがるのはゾーンｎ（ｎ－１）面体である。　この中は平行６面体で充填するがその入り方は一様ではない、しかし数は決まっていて $_{n}C_{3}$ 個である。　ｎ＝３のときゾーン６面体で平行６面体は１個、　ｎ＝４のときゾーン１２面体で６面体は４個、　ｎ＝５のときゾーン２０面体で６面体は１０個、　ｎ＝６のときゾーン３０面体で６面体は２０個、　ｎ＝８のときゾーン５６面体になり６面体の数は５６個になる。

正多面体から菱面体をつくる

正多面体はその面を底面とする正多角錐に分割できる。　正多面体の頂点の数の少ないほうから順に図示する。

正４面体は菱形１２面体になる（図５）。

正８面体は一辺が２の立方体になる（図６）。

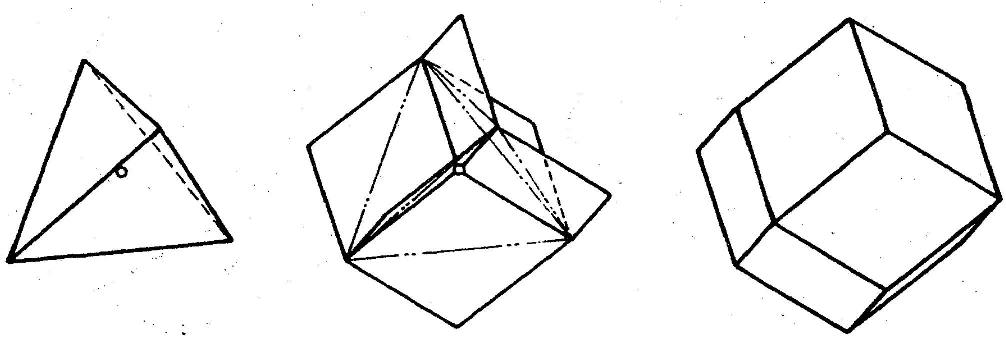


図５　正４面体から菱形１２面体へ

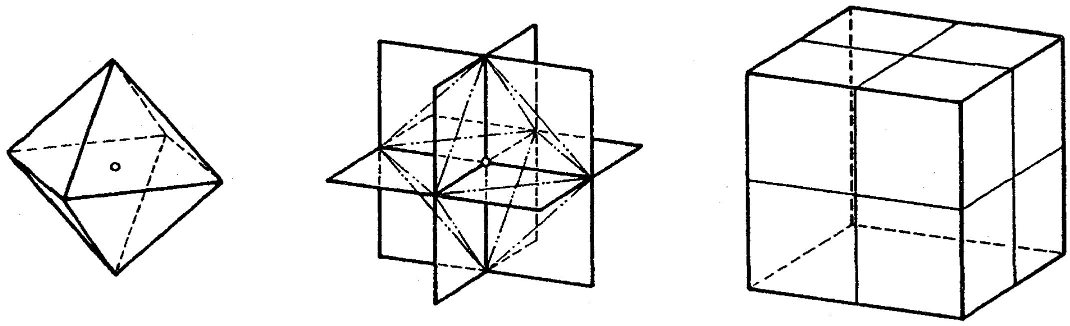


図６　正８面体から立方体へ

立方体は一辺が２の菱形１２面体になる（図７）。この立方体の場合は６個の表面の正方形を底面とする４角錐が菱形１２面体になり、三つの菱形１２面体が合さる３回対称軸上の８個の凹部に菱形６面体が埋まって凸多面体になる。

正２０面体からは一辺が２の菱形３０面体ができる。（図８）

正２０面体の表面の三角形から菱形６面体が２０個出てきて（図８－１）花形１２面体ができる。（図８－２）　この５枚の花びらは５角錐からでてきたゾーン２０面体の一部ともみられるので、思考と手間を省くためにどの

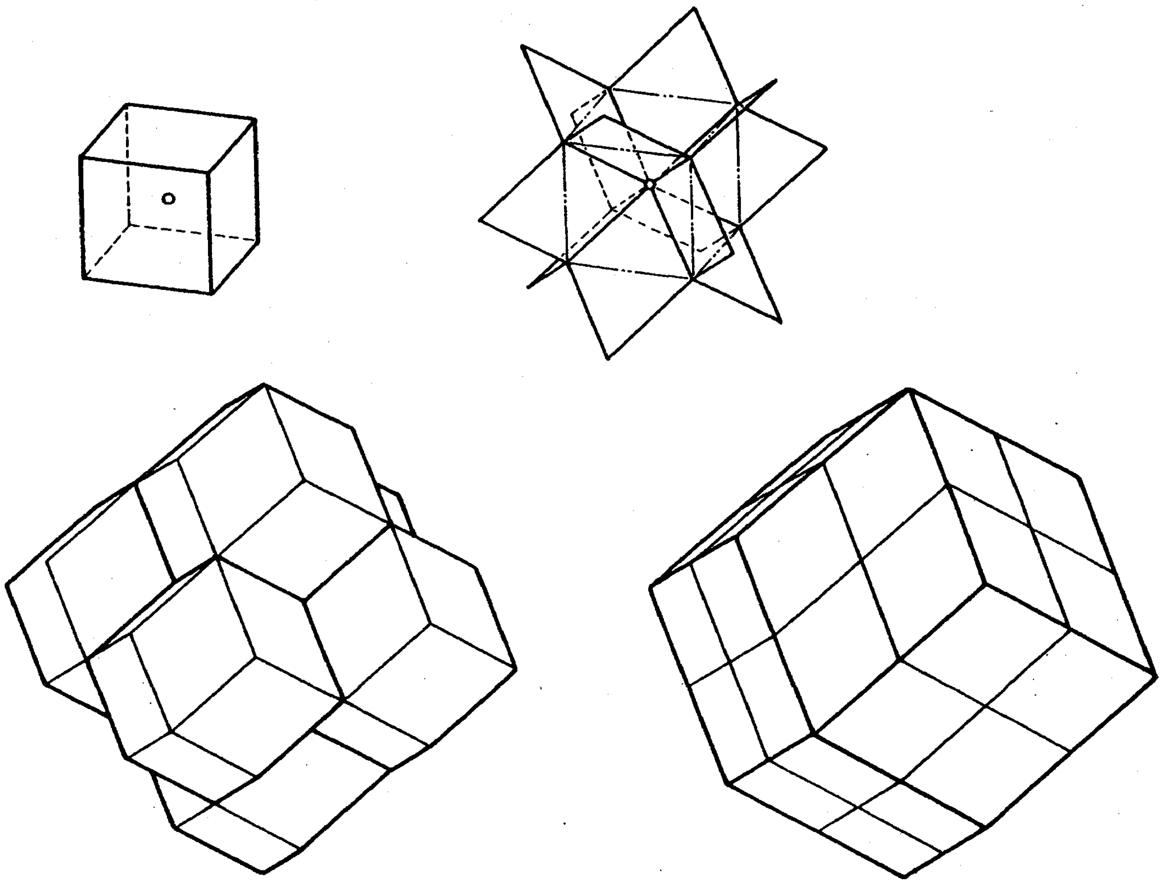


図７　立方体から菱形１２面体へ

ように平行6面体が入っているかということは気にしないで、ゾーン20面体をのせる。このかたちは12個の菱形30面体がオーバーラップしてかたまっている様子に見える。（図8－3）　更に20個の凹部に菱形6面体を埋めて一辺が2の菱形30面体ができあがる。（図8－4）

正12面体からは一辺が2の菱形90面体ができる。　（図9）

まずはじめに表面の5角形からゾーン20面体がでてくる。（図9－1）3個のゾーン20面体に囲まれた凹みに菱形6面体がはいる。この菱形6面体の表面は菱形12面体の表面と同じ菱形である。（図9－2）　次に2個の菱形6面体と2個のゾーン20面体とで囲まれた凹みに菱形12面体をの

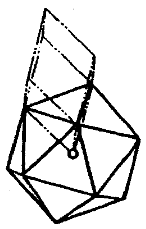


図8－1　正20面体

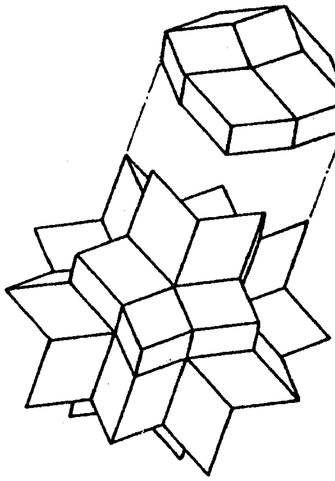


図8－2　花形12面体

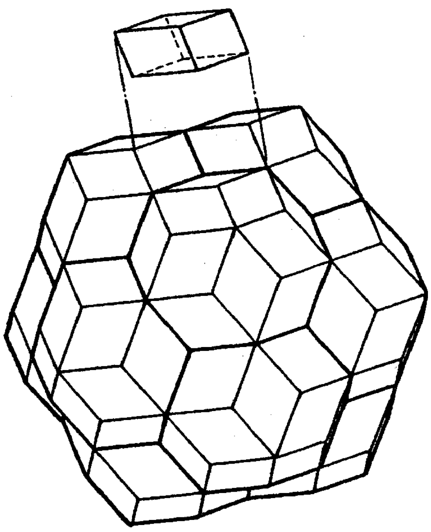


図8－3

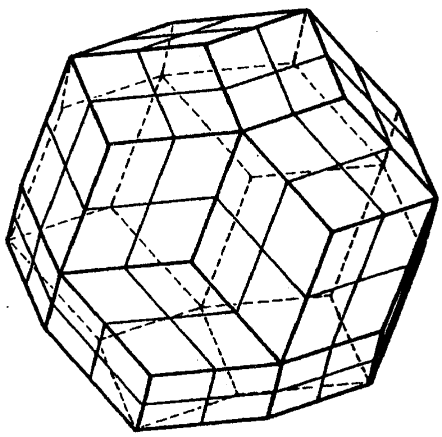


図8－4　1辺が2の菱形30面体

図8　正20面体から菱形30面体へ

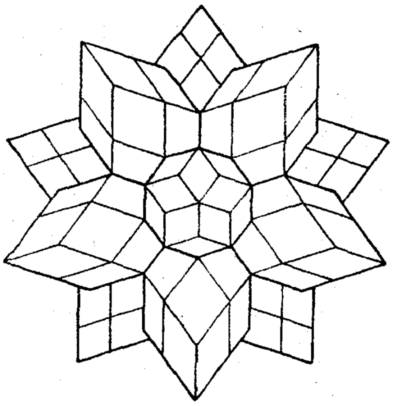


図９－１

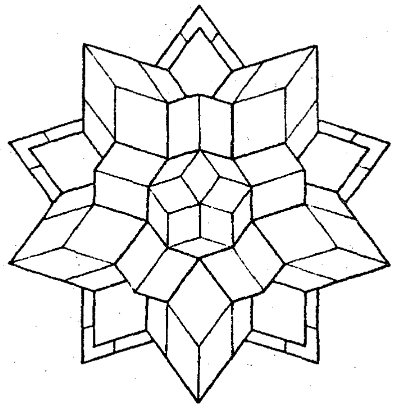


図９－２

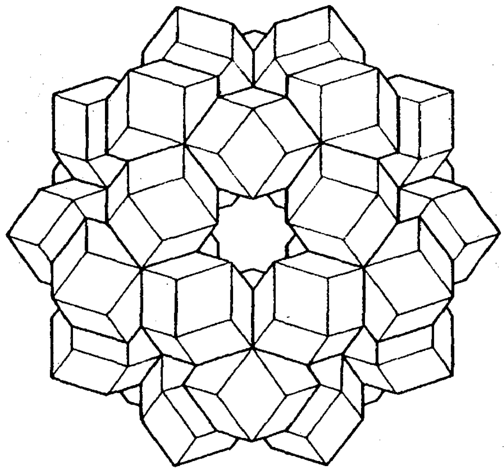


図９－３　　３０個の菱形１２面体

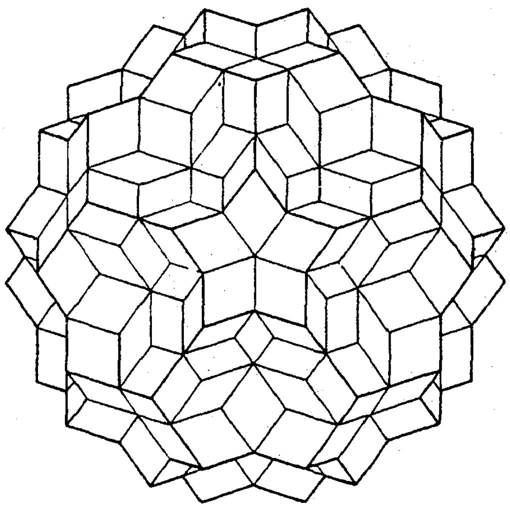


図９－４　花形サッカーボール

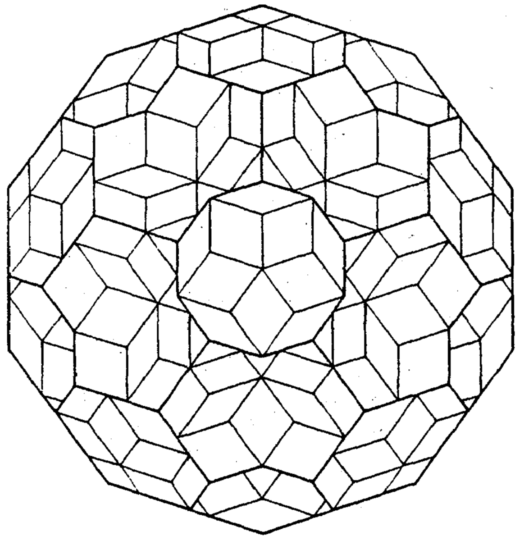


図９－５　　５回対称軸の花に
ゾーン２０面体を乗せる

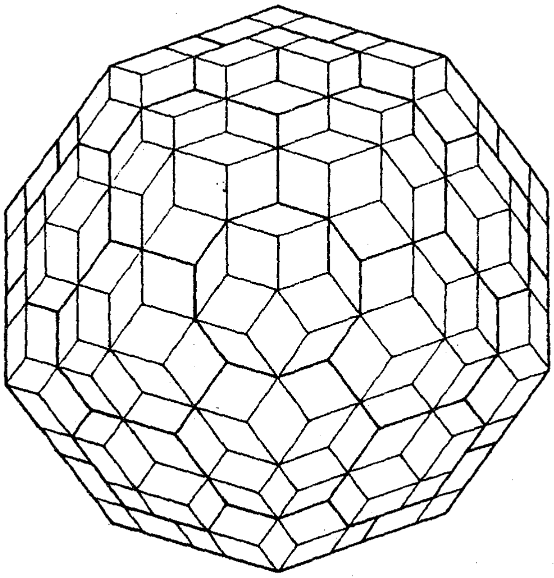


図９－６　　３回対称軸の花に
ゾーン３０面体を乗せる

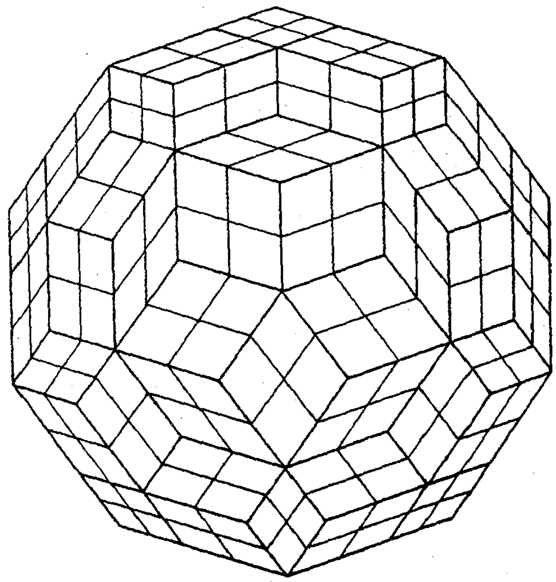


図９－７　１辺が２の菱形９０面体

図９　正１２面体から菱形９０面体へ

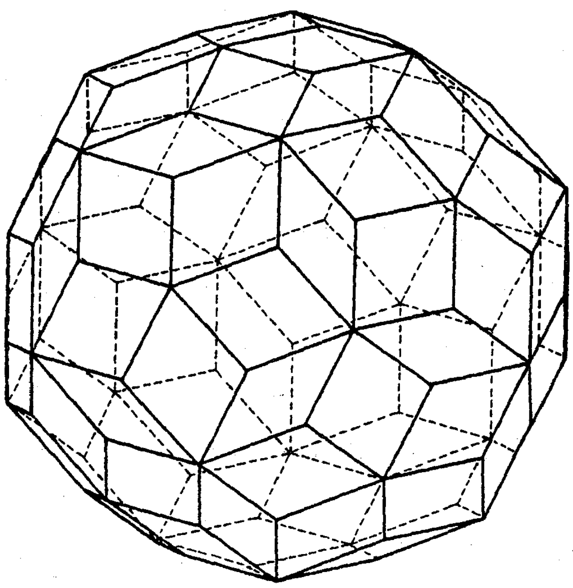


図１０　菱形９０面体

せる。ここで面白いと思うのは菱形１２面体の表面と同じ菱形でできた尖った６面体と菱形１２面体をつなぐと（図９－３）のようになることで、はじめはマラルディ・アングルには黄金比が隠されていたのかと驚いた。 さらに２種類の菱形６面体を加えると、花形３２面体というよりも花形サッカーボールと呼ぶべきか、（図９－４）になる。 ５回対称軸上の花にはゾーン２０面体をのせる。（図９－５） ３回対称軸上の花にはゾーン３０面体をのせる。（図９－６） そしてゾーン２０面体とつながった二つのゾーン３０面体に囲まれた凹みに菱形６面体がはいると一辺が２の菱形９０面体ができる。（図９－７）正１２面体から菱形９０面体への変化を５回対称軸上から見た図を載せたので解りにくい、（図１０）は菱形９０面体の斜視図である。

準正多面体から菱面体をつくる その１（未完成）

正・準正多面体のなかにはの稜線を２等分したところで正多角錐を切り落としたタイプのものがある。 この種の準正多面体には大きな特徴があり、多面体を一周した稜線または稜線と対角線でできる一平面上に多面体の中心があるのでゾーン多面体が退化して多角形になり、その多角形は表面に現われ別の正・準正多面体になる。表面に現われた多角形も、二次元で試みたときのように菱形が線に退化しているので、ベクトルの数から６面体の数を推定するのは難しい。

正４面体は角を落して正８面体になり、その中心から頂点へ向かうベクトルの合成は一辺が２の立方体になる。（図５・図６）

正８面体と立方体は角を落して立方８面体になり、その中心から頂点へ向かうベクトルの合成は一辺が２のケルビンの１４面体になる。（図１１）このケルビンの１４面体の表面の６角形は３個の菱形に分けられるので、ここでは菱形３０面体の一種と考えることにする。３０面体ならば２０個の菱形６面体に分けられるはずだが実際には１６個しかない、これは６面体が平面に退化しているためである。

１２面体と正２０面体は角を落して１２・２０面体になり、その中心から頂点へ向かうベクトルの合成は一辺が２の切頭１２・２０面体になる。（図１２）

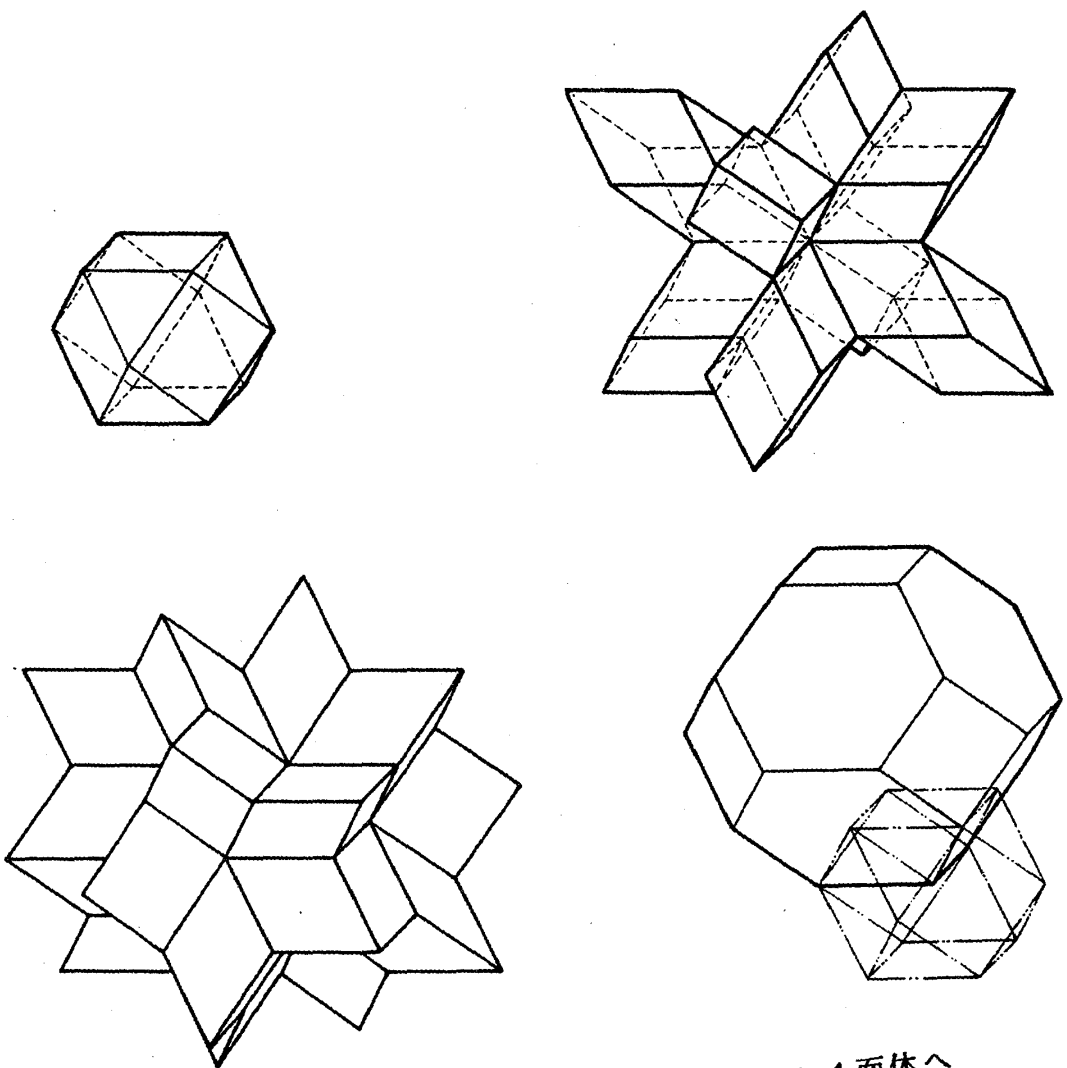
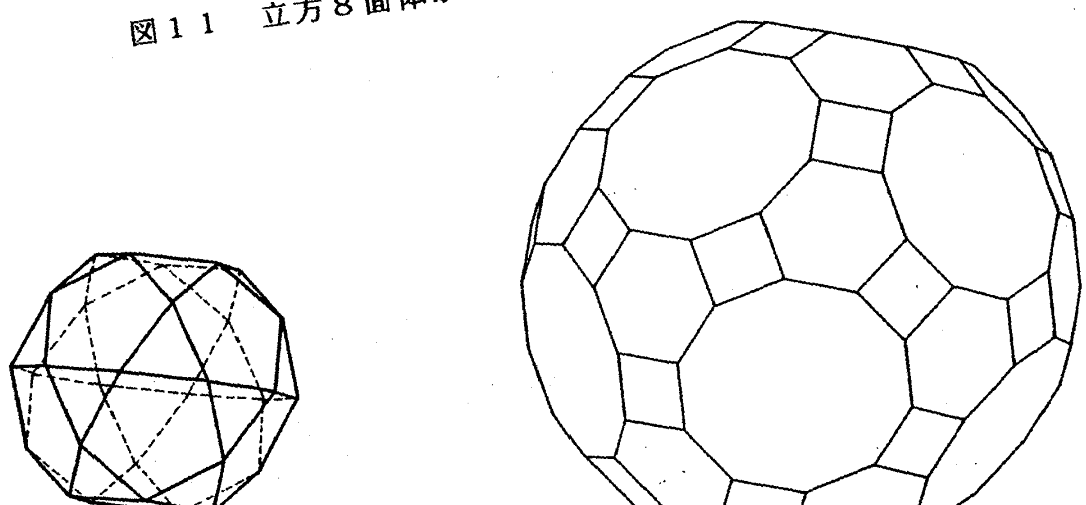


図１１　立方８面体からケルビンの１４面体へ

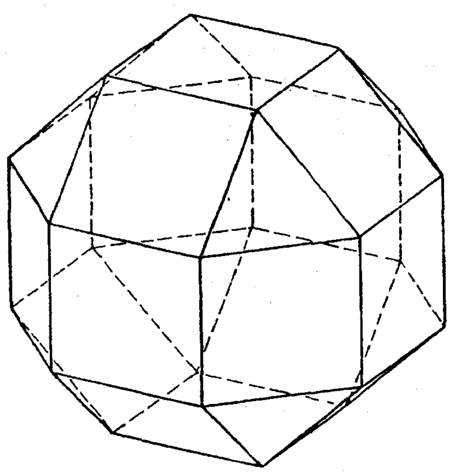


１２・２０面体

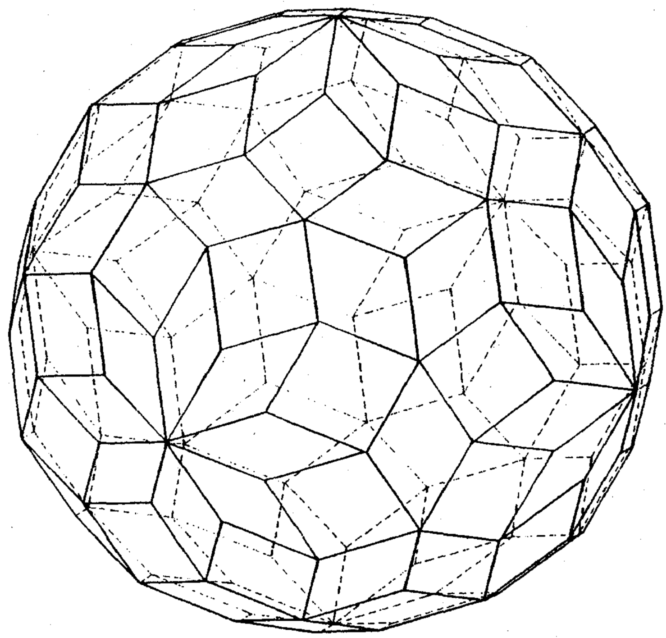
切頭１２・２０面体

図１２　１２・２０面体から切頭１２・２０面体へ

準正多面体から菱面体をつくる　その２（未完成）
菱形立方８面体からできる菱面体は菱形１３２面体である。（図１３）
この菱形１３２面体は${}_{12}C_3$＝２２０個の菱形６面体がはいる。



菱形立方８面体



菱形１３２面体

図１３　菱形立方８面体から菱形１３２面体へ

今回発表できるのはここまでで、次回があるかは分からない。　しかし、方法が理解されれば目的は達した。　　この延長線には、（球面に無数の点をとり球の中心点から菱面を発生させれば、限りなく球に近い菱面体ができる。）とか、菱面体はｎ（ｎ－１）で表わされ、この（ｎ）は次元の数であり、ｎまたは（ｎ－１）が３の倍数ならば３回対称軸を持ち、５の倍数ならば５回対称軸を持つ。という私の独断的解釈がある。

討論（DISCUSSION）

正・準正多面体と菱面体　　別宮　利昭（ﾕﾆｰｸ・ﾃﾞｻﾞｲﾝ・ｽﾀｼﾞｵ）

Q．別宮さんの研究の方法について。
模型をまず作ってそれから研究を進めるのか、数値的な理論が先か。それとも直感が最初か。
細矢　治夫（お茶大・理・化学）

A．連想の繰り返しでネットワークを広げようとしています。パターン認識の一種かも知れませんが、ＡとＢが似たものであれば、Ａに見られる現象がＢにはどのようになっているかを考えますので推理の近いものです。
模型を作るのは他人に見せるためと、推理に自信が無いときにかぎります。失敗しても模型を作った経験はその後の推理に役立ちます。

Q．１：「育てる」という言葉の確認
２：正１２面体的に20本のベクトルの場合の花形１２面体の場合のように対称性が良いと、その先の「育て方」は一義とは限らないように思われますが。
小川　泰（筑波大・物理工）

A．１：最初に二つのベクトルの合成によってできた菱面は他の二つの菱面にそって平行移動し、平行６面体を作ります。凹部に平行６面体を次々に加えてゆくと新しくできた凹部は浅くなり、全体としては大きくなり最後に凸多面体になります。1986年のサイエンス 9月号にて花形１２面体と名付けられたのを知り、”花が咲いたあとは実が成る”と思っていましたので「育てる」を使ってしまいました。
２：例えば花形１２面体の場合、菱形６面体をどのように加えてゆくかは一義ではありません。しかしどのように加えても、菱形６面体１０個の集まりでできるゾーン２０面体になってしまいます。そこで凹部に集まっている花ビラが

３枚の場合	・・・	６面体
４　〃	・・・	ゾーン１２面体
５　〃	・・・	ゾーン２０面体
６　〃	・・・	ゾーン３０面体
８　〃	・・・	ゾーン５６面体

をのせて手間をはぶきます。